DIDATTICA DELLE SCIENZE

Bimestrale per l'insegnamento delle scienze e della matematica

Direttore Mauro Laeng, docente di Pedagogia nell'Università di Roma

Numero 79 del gennaio 1979

Sommario

Fascicolo di 52 pagine più Inserto redazionale.

Inserto

Pubblichiamo in questo numero la prima parte di uno studio sulla trasformazione dell'energia, cioè sulla conversione del calore in energia meccanica. Vengono qui esaminate le implicazioni di natura tecnica connesse con la natura « degradata » dell'energia calorifica e di ogni altra forma di energia naturale. I problemi umani che tale situazione suscita saranno trattati nel prossimo numero.

In copertina

Salamandra (*Salamàndra salamàndra*) (*Fotocolor Schrempp*).

Direttore Responsabile: Vittorino Chizzolini - Autorizzazione del Tribunale di Brescia n. 228 del 31 Marzo 1965 - Spedizione in abbonamento postale - Gruppo IV/70 - Direzione, Redazione, Amministrazione: Editrice La Scuola - S.p.A. - 25100 Brescia, Via Luigi Cadorna, 11 - Conto corrente postale 17-603 - Tel. centr. (030) 47-461 - Telex. 300836 SCUOLA.
Filiali: 40131 Bologna (Via L. Cipriani, 5, tel. (051) 239145 - telex 531141 SCUOBO); 20136 Milano (Viale Bligny, 7, tel. (02) 8370271 - telex 331836 SCUOMI); 00193 Roma (Via Crescenzio, 23, tel. (06) 655179 - 653989 - telex 614259 SCUORO); 80137 Napoli (Via S. Elia ai Miracoli, 19/21 tel. (081) 441200 - telex 720399 SCUONA); 70124 Bari (Via Giulio Petroni, 21 A/E, tel. (080) 228647 - telex 810391 SCUOBA).
Abbonamento annuo 1978-79: L. 7.500 (estero L. 8.300) - Un fascicolo L. 1.300 (arretrato il doppio).
Pubblicazione bimestrale: Stampa: OFFICINE GRAFICHE LA SCUOLA - 25100 BRESCIA.

Carlo Felice Manara

PROGRAMMI DI DECISIONE IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA 2

Esperienze e proposte di didattica matematica. 11

1. Proseguiamo la esposizione che abbiamo iniziato su questa stessa rivista (cfr. Didattica delle Scienze, n. 76, maggio 1978) dei principi del calcolo delle probabilità secondo la impostazione che abbiamo convenuto di chiamare « soggettiva ». Precisamente intendiamo verificare che in questa concezione è possibile ottenere i risultati classici del calcolo delle probabilità, secondo la impostazione che viene detta « oggettiva » e in particolare le formule che danno le probabilità « totali » e « composte »; in più è possibile in modo coerente e semplice sfruttare il calcolo delle probabilità come una teoria che permette di programmare in modo ottimale le decisioni umane in condizioni di incertezza, tenendo conto delle informazioni che sono fornite dall'esperienza.

2. Per lo scopo che ci prefiggiamo, riassumiamo brevemente i punti fondamentali che abbiamo presentato nell'articolo citato sopra; in sostanza, considerato un evento aleatorio E e due soggetti che chiameremo A e B, abbiamo schematizzato il contratto aleatorio nel modo seguente: A versa la somma di denaro a, B la somma di denaro b, con la convenzione che, se l'evento E si verifica, A ritira la propria posta e quella dell'avversario, cioè la somma $(a+b)$; se l'evento E non si verifica, cioè se si verifica l'evento « *non-E* » (simboleggiato con $\overline{E}$), B ritira la propria posta e quella dell'avversario, cioè ancora una volta la somma $(a+b)$; in queste condizioni si dirà che il soggetto A attribuisce all'evento E la probabilità $p = a/(a+b)$ e che il soggetto B attribuisce all'evento « non-E » la probabilità $q = 1 - p = b/(a+b)$. Queste stesse cose vengono anche presentate in altro modo (del tutto equivalente rispetto al significato ed alla logica) dicendo che il soggetto A attribuisce la probabilità p all'evento E se è disposto a pagare subito la somma pS di denaro contro la promessa di riscuotere la somma S se l'evento E si verifica. Pertanto in questa concezione la probabilità di un evento aleatorio E è considerata esclusivamente in relazione ad un determinato soggetto umano, e traduce il giudizio che tale soggetto emette in relazione a certi comportamenti economici; nello schema che abbiamo presentato questi si traducono nel pagamento o nella riscossione di determinate somme di denaro. Ma si possono presentare altri casi, come abbiamo detto parlando della assicurazione sulla vita.
L'attribuzione da parte di un soggetto di una determinata probabilità ad un determinato evento è fatta dipendere da un « principio di coerenza » che potrebbe essere enunciato nel modo seguente: un soggetto A, il quale stipula un certo contratto aleatorio (scommessa) in relazione ad un determinato evento E, è tenuto ad accettare tutte le scommesse che gli vengono offerte in relazione all'evento stesso (o alla sua negazione) in modo tale che, quale che sia il sistema di scommesse considerato, nessuno (né il soggetto né gli avversari) sia sicuro di vincere o di perdere.
Abbiamo anche fatto vedere che questo principio di coerenza conduce il soggetto A, che attribuisce la probabilità p all'evento E, ad attribuire la probabilità $q = 1 - p$ all'evento « *non-E* ». Questa dimostrazione è solo un caso particolare della proposizione che dimostreremo subito e che viene tradizionalmente chiamata « teorema delle probabilità totali ».

3. Per presentare il teorema delle probabilità totali nella sua forma più semplice pensiamo sia conveniente (anche se non strettamente necessario) adottare le notazioni della logica simbolica ed il relativo vocabolario. Del resto tali simboli sono adottati anche nell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme e quindi la loro utilizzazione anche nel campo del calcolo delle probabilità può fornire utili occasioni al docente per un richiamo a teorie e simbolismi che forse alcuni discenti pensano confinati a certi campi della matematica, senza alcuna possibile applicazione al di fuori di questi campi.
Secondo tale vocabolario e tale simbolismo, accanto a due eventi E ed E' si possono considerare altri due eventi che vengono tradizionalmente indicati come « somma logica » e « prodotto logico » di E e di E'. Vale la pena di ricordare che queste denominazioni tradizionali risalgono al periodo della nascita dell'algebra di Boole ed ai simboli che questo matematico adottò per presentare le sue ricerche.
L'evento « somma logica » di E ed E' viene indicato col simbolo « $E \cup E'$ »; si considera che tale evento si verifichi se si verifica uno almeno dei due, E oppure E'; non si esclude a priori che possano verificarsi entrambi.
L'evento « prodotto logico » viene indicato col simbolo « $E \cap E'$ »; si considera che tale evento si verifichi se si verificano entrambi i due, E ed E'. Può avvenire che sia impossibile che i due eventi si verifichino entrambi: si dice allora che i due eventi sono *incompatibili*, ovvero che si escludono a vicenda e si scrive simbolicamente: $E \cap E' = \varnothing$.
Per gli eventi composti che abbiamo presentato valgono alcune proprietà ovvie, che ci limitiamo a ricordare e che costituiscono le proprietà formali iniziali dell'alge-

bra di Boole e delle sue operazioni: si ha infatti $E \cup E' = E' \cup E$; ed inoltre $E \cap E' = E' \cap E$. Queste formule esprimono simbolicamente certe proprietà che potrebbero essere espresse con parole dicendo che l'evento somma logica e l'evento prodotto logico di due eventi E ed E' non dipendono dall'ordine nel quale i due E ed E' vengono presi in considerazione.

Valgono inoltre per gli eventi considerati le classiche leggi della logica, che vengono chiamate *leggi di De Morgan* e che si esprimono con le formule classiche

$$\overline{E \cup E'} = \bar{E} \cap \bar{E}' \quad ; \quad \overline{E \cap E'} = \bar{E} \cup \bar{E}'.$$

4. Ciò che abbiamo brevemente ricordato permette di procedere speditamente alla esposizione che abbiamo in programma. Per ragioni di uniformità e di completezza riprendiamo in considerazione ciò che abbiamo esposto superficialmente nel precedente articolo, e cioè il caso di un solo evento E; e facciamo vedere che il principio di coerenza obbliga il medesimo soggetto A ad attribuire ai due eventi: E e $\bar{E}$ due probabilità p e q tali che si abbia $p + q = 1$. Consideriamo infatti la scommessa sull'evento E, al quale il soggetto A attribuisce la probabilità p, contro la probabilità q che allo stesso evento è attribuita dal suo avversario B; supponiamo poi che all'evento $\bar{E}$ il soggetto A attribuisca una probabilità q' contro la probabilità p' che gli è attribuita dal soggetto B (o da un altro qualunque avversario impersonato da B). Si avrà quindi un insieme di poste e di vincite che sono riassunte nella tabella seguente:

evento	posta di A	posta di B	vincita
E	pS	qS	S
$\bar{E}$	$q'S'$	$p'S'$	S'

Vogliamo dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perché il principio di coerenza sia rispettato è che si abbia

$$(1) \qquad q' = q \qquad \text{ossia} \qquad p + q' = 1.$$

Invero se la (1) non è rispettata, si può escogitare un sistema di scommesse in cui uno degli avversari è sicuro di vincere o di perdere. Sia infatti

$$q' > 1 - p \qquad \text{ossia} \qquad p + q' > 1.$$

In questo caso, il sistema di scommesse in cui è $S = S'$ porta ad una situazione in cui A perde di sicuro: egli infatti deve pagare le poste: $pS + q'S' = (p + q')S$ e vince al massimo S; la situazione inversa si ha nel caso in cui è $p + q' < 1$.

Viceversa si ha che se la (1) è rispettata nessuno (né A né i suoi avversari) è sicuro di vincere o di perdere. Supponiamo infatti che si abbia per esempio $S \leq S'$; in questo caso, in base alla (1), si dimostra facilmente che è

$$S = (p + q')S \leq pS + q'S' \leq (p + q')S' = S';$$

in altre parole, la posta pagata da A, data da $pS + q'S'$ non supera il maggiore e non è minore del minore dei due numeri S ed S', che rappresentano le due vincite nei casi in cui si verifichi rispettivamente E oppure $\bar{E}$.

Con considerazioni soltanto di poco più generali di quelle esposte or ora si giunge facilmente alla determinazione della probabilità dell'evento $E \cup E'$ nel caso più semplice, che è quello in cui i due eventi E ed E' siano incompatibili, cioè si abbia $E \cap E' = \varnothing$.

Osserviamo infatti che i tre eventi E, E', $\overline{E \cup E'}$ si escludono a due a due, e che almeno uno di essi deve verificarsi. Indichiamo con p, p', q'' le probabilità che il soggetto A attribuisce a questi tre eventi e con S, S', S'' rispettivamente le vincite in ciascuna delle scommesse rappresentate nella tabella seguente:

evento	posta di A	posta di B	vincita
E	pS	qS	S
E'	$p'S'$	$q'S'$	S'
$\overline{E \cup E'}$	$q''S''$	$p''S''$	S''

Anche in questo caso, con ragionamento perfettamente analogo al precedente, si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perché il principio di coerenza sia rispettato è che si abbia

$$(2) \qquad p + p' + q'' = 1.$$

Ma abbiamo fatto vedere precedentemente che, perché sia rispettato il principio di coerenza, occorre e basta che sia

$$p'' + q'' = 1$$

e di qui e dalla (2) si trae

$$(3) \qquad p'' = p + p'.$$

Questa formula fornisce dunque la probabilità che A deve attribuire all'evento $E \cup E'$, somma logica di due eventi incompatibili, se vuole rispettare il principio di coerenza. Il risultato espresso dalla formula nelle ipotesi poste viene abitualmente chiamato « teorema delle probabilità totali ».

5. Per approfondire l'analisi nell'ordine di idee che stiamo adottando, occorre dire qualche cosa a proposito del concetto di « probabilità condizionata ».

A tal fine osserviamo che spesso occorre considerare alcune circostanze in cui la valutazione della probabilità che un soggetto attribuisce ad un dato evento E può cambiare con l'informazione che il soggetto acquisisce.

Consideriamo ora un evento aleatorio E e supponiamo che il giudizio di probabilità sull'avverarsi di E possa essere in qualche modo condizionato dall'informazione che si è verificato un evento H.

Per esempio supponiamo che si estragga una carta a caso da un mazzo di 52 carte, ben mescolato. Supponiamo che l'evento E sul quale il soggetto A vuole formulare un giudizio di probabilità sia l'estrazione dell'asso di picche.

Consideriamo come evento H (condizione necessaria in questo caso) il fatto che sia estratta dal mazzo una carta nera. Supponiamo ora che il soggetto A, dopo l'estrazione della carta dal mazzo, non sia completamentne informato sulla carta stessa, ma soltanto sul colore della carta estrat-

ta. Appare chiaro allora che il giudizio di probabilità sull'evento E del soggetto A cambia dopo questa informazione, ed è diverso da quello che egli dava prima dell'estrazione.
Diremo che questa probabilità è « condizionata » dalla estrazione di una carta nera.
Abbiamo detto che il giudizio di probabilità che il soggetto pronuncia sull'avverarsi dell'evento E può essere cambiato in seguito all'informazione del fatto che si è avverato l'evento H. Non è detto che ciò debba necessariamente avvenire; in generale quindi possiamo prendere in considerazione tre giudizi di probabilità.

a) Il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento H; tale giudizio viene espresso mediante un numero che indicheremo con

(4) $$p = p(H).$$

b) Il giudizio di probabilità che viene emesso a proposito dell'avverarsi dell'evento E quando sia acquisita l'informazione che l'evento H si è avverato. Tale giudizio si esprime con un numero p':

(5) $$p' = p(E|H).$$

Il simbolo « $p(E|H)$ » viene chiamato simbolo di « probabilità condizionata ».

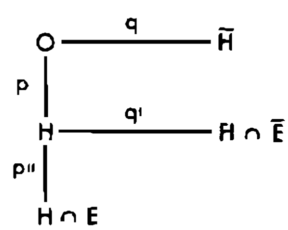
c) Infine il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento prodotto logico $E \cap H$.
La probabilità dell'evento $E \cap H$ viene espressa da

(6) $$p'' = p(E \cap H).$$

Il problema di cui ci occuperemo è quello di stabilire la relazione che intercede tra i tre numeri p, p', p'', relazione che dedurremo in base all'applicazione del criterio di coerenza.
Osserviamo tuttavia ancora una volta che l'aver chiamato il numero $p(E|H)$ « probabilità di E condizionato da H » non vuole assolutamente significare che l'evento H sia causa dell'evento E oppure anche soltanto condizione necessaria per l'avverarsi di E. Invero può avvenire che il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento E non sia cambiato dall'acquisizione dell'informazione del fatto che H si è avverato.
In questo caso si ha che è

(7) $$p(E|H) = p(E)$$

ed i due eventi, E ed H vengono detti « indipendenti ».
Può anche darsi che l'informazione sul fatto che l'evento E si è avverato possa influire sul giudizio di probabilità che il soggetto emette a proposito dell'evento H. Ciò avviene anche nel nostro modo di ragionare abituale. Per esempio, consideriamo una certa regione dell'Oceano; l'informazione sul fatto che ivi in un dato giorno vi sia stata una grandissima tempesta modifica il nostro giudizio di probabilità sull'informazione che nello stesso giorno e nella stessa regione ci sia stato un naufragio. Ma reciprocamente la notizia che ivi in un certo giorno ci sia stato un naufragio modifica il nostro giudizio sulla probabilità dell'informazione che ivi nello stesso giorno ci sia stata una forte tempesta.
Nel caso che ci interessa la situazione potrebbe essere schematizzata in questo diagramma.



All'origine O il soggetto deve dare due giudizi: il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento H, che si esprime con il valore p, ed il giudizio sull'avverarsi dell'evento $E \cap H$, che si esprime nel numero p''. A partire dall'origine O si possono avere due informazioni: o che l'evento H è avvenuto oppure che l'evento H non è avvenuto, cioè che è avvenuto l'evento $\overline{H}$.
In questa seconda ipotesi cessa di avere senso ogni ulteriore giudizio sugli eventi che ci interessano perché, ovviamente, H è condizione necessaria per l'avverarsi di $E \cap H$. Nell'ipotesi contraria, cioè nell'ipotesi che l'evento H sia avvenuto, vi è luogo ad esprimere un secondo giudizio di probabilità, a proposito dell'avverarsi oppure no dell'evento E; in altre parole vi è luogo ad esprimere il giudizio sull'evento $H \cap E$ e sull'evento contrario $H \cap \overline{E}$.
Secondo lo schema che abbiamo ripetutamente adottato, immaginiamo due giocatori A e B, i quali scommettono con le poste a e b rispettivamente sugli eventi H e $\overline{H}$. Poniamo

(8) $$a + b = S$$

e nell'ipotesi del verificarsi dell'evento H il giocatore A ritira la somma S, nell'ipotesi dell'evento $\overline{H}$ il giocatore B ritira S. Indicando quindi con p e q i due numeri che traducono i giudizi di A e B rispettivamente sugli eventi H e $\overline{H}$ si avrà, in base ai ragionamenti svolti

(9) $$p = a/S \quad ; \quad q = b/S.$$

Supponiamo di aver acquisito l'informazione del fatto che l'evento H è avvenuto ed indichiamo con a' e b' rispettivamente le somme che i due giocatori *dopo questa informazione*, sono disposti a scommettere sull'avverarsi successivo degli eventi E o $\overline{E}$ rispettivamente; poniamo

(10) $$a' + b' = S';$$

ed anche in questo caso si ha

(11) $$p' = a'/S' \quad ; \quad q' = b'/S'$$

con i patti analoghi a quelli del caso precedente.

Moltiplichiamo entrambi i membri della (8) per S'; si ottiene ovviamente, tenendo conto della (10),

(12) $$a(a' + b') + b\,S' = S\,S',$$

ossia

(13) $$a\,a' + a\,b' + b\,S' = S\,S'.$$

La (12) può essere interpretata nel modo seguente: il giocatore A è disposto a rischiare la somma aS' col patto di ritirare la somma $S\,S'$ se l'evento H si verifica; ma egli è anche disposto a rischiare *parte* di questa somma e precisamente la parte $a\,a'$, col patto di ritirare la somma $S\,S'$ se si verifica l'evento $E \cap H$. Pertanto si ha che il giudizio di probabilità che egli emette su questo evento è dato da

(14) $$p'' = a\,a' / S\,S',$$

e, tenendo conto delle (9) e (11)

(15) $$p'' = p\,p'.$$

Viceversa si verifica che se la (15) è soddisfatta, non vi può essere certezza di vincere né per il giocatore né per il suo avversario. Infatti siano S, S', S'' le somme di denaro che danno le vincite nei casi in cui si verifichino rispettivamente gli eventi $\overline{H}$, E subordinato ad H, ed infine $H \cap E$. Le scommesse corrispondenti portano delle spese che sono date rispettivamente da pS, $p'S'$, $p''S''$. Come mostra anche lo schema che abbiamo presentato, gli eventi che possono verificarsi (incompatibili tra loro) sono: $\overline{H}$, $H \cap E$, $H \cap \overline{E}$. A questi corrispondono i guadagni seguenti: se si verifica $\overline{H}$: $-pS - p''S''$ (tale guadagno è sempre non positivo e nel calcolo di esso si tiene conto della clausola secondo la quale, se si verifica $\overline{H}$, cade ovviamente la scommessa sugli eventi $H \cap \overline{E}$ ed $H \cap E$ e quindi lo scommettitore ricupera la somma $p'S'$); se si verifica $H \cap \overline{E}$: $S - (pS + p'S' + p''S'')$; se si verifica $H \cap E$: $S + S' + S'' - (pS + p'S' + p''S'')$.
Indichiamo rispettivamente con u, v, w tali guadagni; si fa vedere che se vale la (15), essi non possono essere tutti dello stesso segno: si ha infatti

$$q\,u + pq'\,v + p\,p'\,w = S''\,(pp' - p'') = 0$$

e quindi i tre addendi del primo membro non possono essere tutti dello stesso segno. Si conclude quindi che la validità della (15) è condizione sufficiente perché non vi sia sicurezza di vincere, quale che sia l'evento che si verifica.
Questo risultato potrebbe essere espresso con i simboli adottati poco fa con la formula

(16) $$p(E \cap H) = p(H)\;p(E|H)$$

Dalla (16) si trae in particolare la formula che lega le probabilità di due eventi indipendenti, tali cioè che valga la (7). Invero in questo caso la (16) dà in particolare la

(17) $$p(E \cap H) = p(H) \cdot p(E);$$

essa traduce quella che viene chiamata nelle trattazioni classiche la proposizione (detta anche teorema) delle « probabilità composte », che riguarda appunto l'avverarsi di un evento « prodotto logico » di due altri, che siano indipendenti tra loro (cioè tali che l'avverarsi dell'uno non influenzi l'avverarsi dell'altro) e l'avverarsi di entrambi.
Ricordiamo ora ciò che abbiamo detto a proposito della possibilità che l'informazione sul fatto che l'evento H è accaduto possa modificare il giudizio di probabilità sull'accadere dell'evento E; abbiamo osservato che si può ragionare in modo analogo anche sulla modifica del giudizio di probabilità sull'accadimento dell'evento H, quando si sia acquisita la informazione che l'evento E è accaduto.
Possiamo ora notare che nel primo membro della (16) figura l'evento « prodotto logico » $E \cap H$ e che per tale evento vale la proprietà commutativa.
Si può quindi scrivere, scambiando nel secondo membro di (16) E ed H:

(18) $$p(H)\;p(E|H) = p(E)\;p(H|E).$$

RECENSIONI

Quarto Convegno sull'Insegnamento della Matematica (Ferrara, 23-24 aprile 1978), a cura di Sandra Giuntini, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana, Bologna 1978, pp. 134, prezzo non indicato.

Degli Atti di questo convegno — che continuano un servizio dell'Unione Matematica Italiana del quale già ci siamo occupati — ci limitiamo a presentare l'indice.

Elenco dei partecipanti; Introduzione al Convegno del Prof. Luigi Pepe (Istituto Matematico di Ferrara), del Prof. Antonio Rossi (Rettore dell'Università di Ferrara), del Prof. Carlo Pucci (Presidente Unione Matematica Italiana). *Problemi della scuola media:* « Orari e programmi » - Relazione del Prof. C. Mammana; Introduzione al dibattito del Prof. Vinicio Villani, Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica. *Interventi:* Proff.: Busulini, Rossi A.M., Villani, Boero, Malesani, Morgantini, Valabrega, Boero, Villani, Pucci, Boero, Montaldo, Boscia, Ferrari, Busulini, Rossi A.M., Morgantini, Valabrega, Boero; « L'insegnamento scientifico ed il ruolo della matematica » - Relazione del Prof. P. Boero. *Interventi:* Proff.: Orlandini, Prodi, Olivieri, Maracchia, Rossi A.M., Pellizzaro, Boero. *Problemi della scuola secondaria superiore:* « Sperimentazioni ed aggiornamento » - Relazione del Prof. V. Villani; Proff.: Cannizzaro, Anselmi, Prodi, Orlandini, Zappa, Morgantini, Papini, Mobilio, Ferrari, Boero, Rossi A.M., Pirillo, Morelli. *Appendice:* Notizie sui contratti di didattica del CNR; Allegati alla relazione del Prof. P. Boero:
Relazioni sull'attività svolta nell'ambito del Contratto CNR-Università di Bari. Relazione sull'attività svolta nell'ambito del Contratto CNR-Università di Cagliari. Relazione sulla attività svolta nell'ambito del Contratto CNR-Università di Genova. Relazione sull'attività svolta presso l'Istituto Regionale di Psicopedagogia dell'Apprendimento della Regione Emilia-Romagna. Allegato alla relazione del Prof. V. Villani: « The Theachers' Centres » - a cura del Prof. F. Emiliani. Relazione sull'avvio del corso di aggiornamento: « Programmazione didattica nel settore naturalistico, con particolare riferimento ai fattori biologici e ai problemi di matematizzazione » - a cura della Prof. A. Zappa. Relazione

(continua a pag. 22)